UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH — Année 2019/2020
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE FÈS
CYCLE PRÉPARATOIRE — CP1 S_2
MATIÈRE : ALGBREII

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIE 4

Exercice 1 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X^3-X}} \qquad \mathbf{2.}\ \frac{\mathbf{X^2+2X+5}}{\mathbf{X^2-3X+2}} \qquad \mathbf{3.}\ \frac{\mathbf{X^3}}{\mathbf{(X-1)(X-2)(X-3)}}$$

$$\mathbf{4.}\ \frac{\mathbf{2X^2+1}}{\mathbf{(X^2-1)^2}} \qquad \mathbf{5.}\ \frac{\mathbf{X^3+1}}{\mathbf{(X-1)^3}} \qquad \mathbf{6.}\ \frac{\mathbf{X^4+1}}{\mathbf{(X+1)^2(X^2+1)}}$$

Indications : chercher les pôles et utiliser la formule :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-z_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\eta_k}\frac{\theta_{k,j}X+\tau_{k,j}}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^j}\right).$$

Exercice 2 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{X^n-1}} \qquad \mathbf{2.}\ \frac{\mathbf{X^{n-1}}}{\mathbf{X^n-1}} \qquad \mathbf{3.}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(X-1)(X^n-1)}}$$

Indications : utiliser le fait que si λ est un pôle simple d'une fraction $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$ dont (A,B) est un représentant irrductible de F, alors le coéfficient de l'élément simple $\frac{1}{X-\lambda}$ dans la décomposition de F est $\frac{\widetilde{A(\lambda)}}{\widetilde{B'(\lambda)}}$.

Exercice 3

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle :

$$F = \frac{1}{X^2+1}$$

.

2. En déduire $F^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$F^n = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}.$$

Indications : 2. montrer d'abord que $\frac{d^n}{dX^n}(\frac{1}{X-a}) = (-1)^n.n!.\frac{1}{(X-a)^{n+1}}$, 3. utiliser la formule du binôme dans $\mathbb{C}[X]$ pour déterminer le polynôme P.